Autômatos Finitos Determinísticos

Bruno César Ribas

UnB-FGA

20 de março de 2019

Revisão - Expressões Regulares

- Método formal de se especificar um padrão de um texto;
- Interpreta-se como uma regra
  - entrada válida: obedece todas as suas condições
- Exemplo de expressões sobre o alfabeto $\{0, 1\}$:
  1. que contém 00
     - $(0+1)^*00(0+1)^*$
  2. que contém 00 ou 11
     - $(0+1)^*(00+11)(0+1)^*$
     - $(0+1)^*00(0+1)^* + (0+1)^*11(0+1)^*$

Autômatos Finitos

O que é?

- Modelo Matemático:
  - Modela uma máquina simples;
  - Utilizadas para reconhecer uma linguagem;
  - Possui entradas e saídas finitas
    - Entrada: determinada sequencia de símbolos do alfabeto
    - Saída: estados que devem ser predefinidos
  - Por que predefinido?
    - Não possui memória auxiliar
    - Informação "memorizada" por cada estado
- Exemplos:
  - Caixa eletrônico, Máquina de Refrigerante, Televisão

Autômatos Finitos

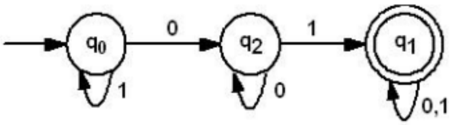
Tipos:

- Determinístico:
  - estado corrente + símbolo de entrada → estado resultante **único**
- Não Determinístico:
  - estado corrente + símbolo de entrada → estado resultante pertencente a um **conjunto** de estados alternativos
  - estado corrente + nenhum símbolo de entrada → estado resultante pertencente a um **conjunto** de estados alternativos

Autômatos Finitos Determinísticos (AFD)

É formado basicamente por 3 partes:

- Entrada
  - informação a ser processada
- Controle
  - reflete o estado corrente da máquina
- Função de transição
  - determina a transição de estado conforme estado corrente e símbolo de entrada lido



Autômatos Finitos Determinísticos (AFD)

Definição Formal:

- AFD é definido através da quíntupla:

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

Q é o conjunto finito não vazio de estados;

Σ é o alfabeto de símbolos de entrada;

$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ é a função de transição;

$q_0 \in Q$ é o estado inicial;

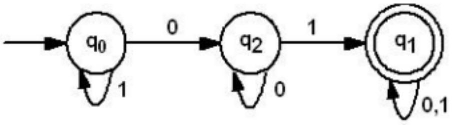
$F \subseteq Q$ é o subconjunto Q dos estados finais.

Autômatos Finitos Determinísticos (AFD)

Representações:
Dada a linguagem:

$$L = \{w \in \Sigma^* |\ \text{a seqüência 01 é parte de } w\}$$

- Diagrama:



Autômatos Finitos Determinísticos (AFD)

Representações:

Dada a linguagem:

$$L = \{w \in \Sigma^* | \text{ a seqüência 01 é parte de } w\}$$

- Tabela de Transição:

	0	1
$\rightarrow q_0$	q_2	q_0
$* q_1$	q_1	q_1
q_2	q_2	q_1

Autômatos Finitos Determinísticos (AFD)

- Função de transição estendida
  - Representação do consumo da palavra;
  - Evolução das configurações durante o processamento de uma palavra
  - $\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ é a função de transição $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ estendida para as palavras, definida recursivamente por:
    - se $|w| = 0$, então $w = \varepsilon$ e $\delta^*(q_i, \varepsilon) = q_i$
    - se $|w| = 1$, então $w = a$ (a pertence a Σ) e $\delta^*(q_i, a) = \delta(q_i, a)$
    - se $|w| > 1$, então $w = ua$ e $\delta^*(q_i, ua) = \delta^*(\delta(q_i, u), a)$

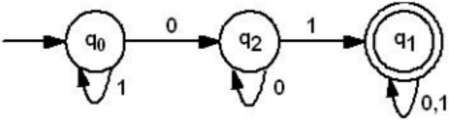
Autômatos Finitos Determinísticos (AFD)

Exemplo:

Linguagem: $L = \{w \in \Sigma^* |$ seqüência 01 é parte de $w\}$

$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$

Entrada: 1001



$\delta^*(q_0, 1001) =$

$\delta^*(\delta(q_0, 1), 001) =$

$\delta^*(q_0, 001) =$

$\delta^*(\delta(q_0, 0), 01) =$

$\delta^*(q_2, 01) =$

$\delta^*(\delta(q_2, 0), 1) =$

$\delta^*(q_2, 1) =$

$\delta^*(\delta(q_2, 1), \varepsilon) =$

$\delta^*(q_1, \varepsilon) = q_1$

- $1001 \in L$

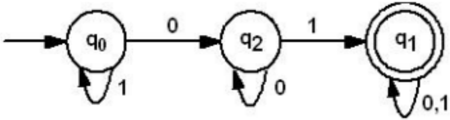
Autômatos Finitos Determinísticos (AFD)

Exemplo:

Linguagem: $L = \{w \in \Sigma^* |$ seqüência 01 é parte de $w\}$

$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$

Entrada: 1001



$\delta^*(q_0, 1001) =$

$\delta^*(\delta(q_0, 1), 001) =$

$\delta^*(q_0, 001) =$

$\delta^*(\delta(q_0, 0), 01) =$

$\delta^*(q_2, 01) =$

$\delta^*(\delta(q_2, 0), 1) =$

$\delta^*(q_2, 1) =$

$\delta^*(\delta(q_2, 1), \varepsilon) =$

$\delta^*(q_1, \varepsilon) = q_1$

- $1001 \in L$

Autômatos Finitos Determinísticos (AFD)

Um autômato finito SEMPRE termina, não existe loop infinito
Computação de um autômato finito:

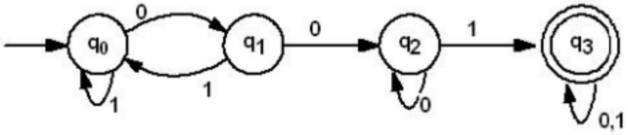
- Palavra de entrada w
- Sucessivas aplicações da função de transição para cada símbolo de w (da esquerda para direita)
- Até ocorrer uma condição de parada

Condição de parada:

- aceita:
  - processa a palavra inteira e chega à um estado final
- rejeita:
  - processa a palavra inteira e não chega a um estado final ou
  - função indefinida para argumento (estado e símbolo)

AFD - Exemplo1

$L = \{w \in \Sigma^* |$ a seqüência 001 é parte de $w\}$
Entrada: $w = 011$



$\delta^*(q_0, 011) =$

$\delta^*(\delta(q_0, 0), 11) =$

$\delta^*(q_1, 11) =$

$\delta^*(\delta(q_1, 1), 1) =$

$\delta^*(q_0, 1) =$

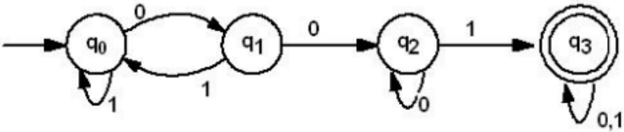
$\delta^*(\delta(q_0, 1), \varepsilon) =$

$\delta^*(q_0, \varepsilon) = q_0$

- q_0 não é estado final, portanto 011 NÃO pertence a L

AFD - Exemplo1

$L = \{w \in \Sigma^* |$ a seqüência 001 é parte de $w\}$
Entrada: $w = 011$



$\delta^*(q_0, 011) =$

$\delta^*(\delta(q_0, 0), 11) =$

$\delta^*(q_1, 11) =$

$\delta^*(\delta(q_1, 1), 1) =$

$\delta^*(q_0, 1) =$

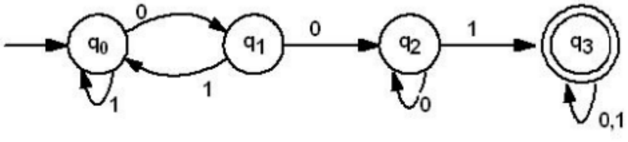
$\delta^*(\delta(q_0, 1), \varepsilon) =$

$\delta^*(q_0, \varepsilon) = q_0$

- q_0 não é estado final, portanto 011 NÃO pertence a L

AFD - Exemplo1

$L = \{w \in \Sigma^* |$ a seqüência 001 é parte de $w\}$
Entrada: $w = 011$



$\delta^*(q_0, 011) =$

$\delta^*(\delta(q_0, 0), 11) =$

$\delta^*(q_1, 11) =$

$\delta^*(\delta(q_1, 1), 1) =$

$\delta^*(q_0, 1) =$

$\delta^*(\delta(q_0, 1), \varepsilon) =$

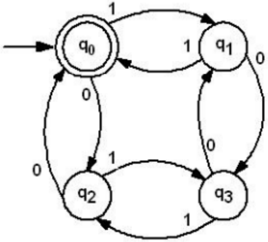
$\delta^*(q_0, \varepsilon) = q_0$

- q_0 não é estado final, portanto 011 NÃO pertence a L

AFD - Exemplo2

$L = \{w \in \Sigma^* | w$ tem um número par de 0's e 1's $\}$

- q_0 par de 0's e par de 1's
- q_1 par de 0's e ímpar de 1's
- q_2 par de 1's e ímpar de 0's
- q_3 ímpar de 0's e ímpar de 1's



Entrada: $w = 1100$

$\delta^*(q_0, 1100) =$

$\delta^*(\delta(q_0, 1), 100) =$

$\delta^*(q_1, 100) =$

$\delta^*(\delta(q_1, 1), 00) =$

$\delta^*(q_0, 00) =$

$\delta^*(\delta(q_0, 0), 0) =$

$\delta^*(q_2, 0) =$

$\delta^*(\delta(q_2, 0), \varepsilon) =$

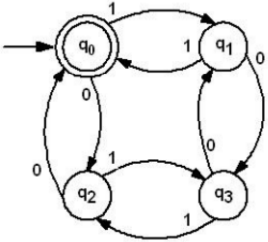
$\delta^*(q_0, \varepsilon) = q_0$

- q_0 é estado final, portanto 1100 pertence a L

AFD - Exemplo2

$L = \{w \in \Sigma^* | w \text{ tem um número par de 0's e 1's } \}$

- q_0 par de 0's e par de 1's
- q_1 par de 0's e ímpar de 1's
- q_2 par de 1's e ímpar de 0's
- q_3 ímpar de 0's e ímpar de 1's



Entrada: $w = 1100$

$\delta^*(q_0, 1100) =$

$\delta^*(\delta(q_0, 1), 100) =$

$\delta^*(q_1, 100) =$

$\delta^*(\delta(q_1, 1), 00) =$

$\delta^*(q_0, 00) =$

$\delta^*(\delta(q_0, 0), 0) =$

$\delta^*(q_2, 0) =$

$\delta^*(\delta(q_2, 0), \varepsilon) =$

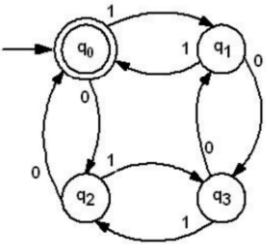
$\delta^*(q_0, \varepsilon) = q_0$

- q_0 é estado final, portanto 1100 pertence a L

AFD - Exemplo2

$L = \{w \in \Sigma^* | w$ tem um número par de 0's e 1's $\}$

- q_0 par de 0's e par de 1's
- q_1 par de 0's e ímpar de 1's
- q_2 par de 1's e ímpar de 0's
- q_3 ímpar de 0's e ímpar de 1's



Entrada: $w = 1100$

$\delta^*(q_0, 1100) =$

$\delta^*(\delta(q_0, 1), 100) =$

$\delta^*(q_1, 100) =$

$\delta^*(\delta(q_1, 1), 00) =$

$\delta^*(q_0, 00) =$

$\delta^*(\delta(q_0, 0), 0) =$

$\delta^*(q_2, 0) =$

$\delta^*(\delta(q_2, 0), \varepsilon) =$

$\delta^*(q_0, \varepsilon) = q_0$

- q_0 é estado final, portanto 1100 pertence a L

Resumo

- Autômato Finito:
  - Utilizadas para reconhecer uma linguagem
  - Estados finitos e predefinidos
  - Não possui memória auxiliar
- Autômato Finito Determinístico (AFD)
  - estado corrente + símbolo de entrada $\rightarrow$ estado resultante **único**
- Condição de parada:
  - aceita:
    - processa a palavra inteira e chega a um estado final
  - rejeita:
    - processa a palavra inteira não chega a um estado final ou
    - função indefinida para argumento (estado e símbolo)

Exercício 1

Dadas as expressões regulares:

- $0(0+1)^*$
- $(0+1)^*1$

Responda:

- Quais as linguagens que as expressões regulares definem?
- Construa o AFD correspondente

Exercício 2

Dadas as linguagens:

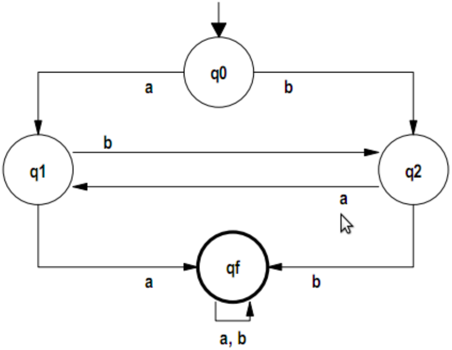
- $L = \{w \in \{0,1\}^* | w \text{ contém pelo menos um } 0\}$
- $L = \{w \in \{a,b\}^* | w \text{ possui dois } b\text{'s consecutivos}\}$
- $L = \{w \in \{a,b\}^* | w \text{ não possui dois } a\text{'s consecutivos } \}$

Responda:

- Construa o AFD que reconhece cada uma das linguagens acima.

Exercício 3

Dado o AFD e sua respectiva linguagem:



$$L = \{w | w \text{ possui } aa \text{ ou } bb \text{ como subpalavra } \}$$

Responda:

- Mostre a função estendida para as palavras:
  - *aabaabb*
  - *babab*
  - *bbab*
  - *aabb*
- Construa a tabela de transição do AFD

Autômatos Finitos Determinísticos

Bruno César Ribas

UnB-FGA

20 de março de 2019